TD n°10: Théorème de factorisation de Hadamard

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un [†] sont à faire en priorité, ceux marqués d'un [†] sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Le but de ce TD est de manipuler le théorème de Hadamard dans un premier temps, puis de le démontrer dans un second.
Soit f une fonction entière. On définit l'ordre ρ de f comme

$$\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : |f(z)| \leqslant Ae^{B|z|^{\alpha}},\ A, B \text{ constantes } > 0, |z| \text{ assez grand}\right\}.$$

Théorème (Factorisation de Hadamard)**.** *Soit f une fonction entière d'ordre $\rho \geqslant 0$, et $p = \lfloor \rho \rfloor$. On note*

$$E_p(z) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right).$$

Il existe un unique polynôme $Q(z)$, de degré au plus p, et un entier $m \geqslant 0$ tels que

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} \prod_{n\geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Conséquences du théorème

Exercice 1. Des produits plus ou moins connus.

1. Calculer les ordres de $z \mapsto P(z)e^{Q(z)}$ avec P, Q polynômes, et des fonctions trigonmétriques $\sin, \cos$.
   $P(z)e^{Q(z)}$ est d'ordre $\leqslant \deg(Q)$ en majorant brutalement $|P(z)| < e^{C\log|z|}$ et $|e^{Q(z)}| = e^{\Re(Q(z))} \leqslant e^{|Q(z)|} < e^{B|z|^{\deg(Q)}}$.
   En considérant $z = wt$ avec $t \in \mathbb{R}$ et w fixé tel que $w^{\deg(Q)} = \frac{1}{a_{\deg(Q)}}$, le coefficient dominant de Q, et ainsi $\Re(Q(ht)) = t^{\deg(Q)} + O(t^{\deg(Q)-1})$, donc Pe^Q est bien d'ordre exactement $\deg(Q)$. Pour les fonctions trigonométriques, on a $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et donc $cos(it) = \cosh(t)$. De plus, la majoration brutale donne $|\cos(z)| \leqslant \cosh(\Re(iz)) \leqslant \cosh(|z|)$, ce qui prouve que cos est d'ordre 1. Le sinus fonctione similairement, avec $\sin(it) = i\sinh(t)$.

2. A l'aide du théorème de Hadamard, retrouver les produits pour le sinus et la fonction Γ (en admettant que la fonction entière $\frac{1}{\Gamma}$ est d'ordre 1 : c'est une extension à $\mathbb{C}$ de la formule de Stirling). Trouver une formule de produit pour le cosinus.
   Pour le sinus, qui est d'ordre 1, on trouve

   $$\sin(z) = ze^{az} \prod_{n\neq 0}\left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}.$$

   Comme $\sin(-z) = -\sin(z)$, on trouve $a = 0$, et en regroupant ensemble les termes pour n et $-n$, on trouve

   $$\sin(z) = z\prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

   Alternativement, on peut appliquer le théorème de Hadamard à la fonction $\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$, qui est bien définie car $\frac{\sin(z)}{z}$ est paire. C'est une fonction entière d'ordre $\frac{1}{2}$ ayant des zéros simples en les $n^2\pi^2$ pour $n \geqslant 1$, et on obtient :

   $$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right).$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Pour la fonction $\frac{1}{\Gamma}$, on a (au vu du calcul de son résidu en 0, qui vaut 1)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{cz} \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Pour trouver c, il suffit de remarquer qu'en toute généralité, si

$$f(z) = z^m e^{cz} \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$$

alors on a précisément $c = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ car le produit n'est composé que de termes de la forme $1 - \frac{z^2}{a_n^2} + O(z^3)$. On calcule la dérivée seconde en 0 de $\frac{1}{\Gamma}$ en écrivant $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{\Gamma(s)} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s+1)} - \frac{s\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)^2} \\ &= -\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} - \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)^2} + \frac{2s\Gamma'(s+1)^2}{\Gamma(s+1)^3}. \end{aligned}$$

En évaluant en $s = 0$, on trouve $-2\Gamma'(1) = 2\gamma$ (voir le TD6 pour le calcul de la dérivée de la fonction digamma, et donc gamma). On trouve ainsi :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}.$$

Reste le cos, on peut écrire

$$\cos(z) = e^{cz} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}\right) e^{\frac{z}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}.$$

On rassemble entre eux les termes opposés (i.e. $n + \frac{1}{2}$ et $-n - 1 + \frac{1}{2}$) pour obtenir :

$$\cos(z) = e^{cz} \prod_{n \geqslant 0} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Pour que la fonction à droite soit paire, il faut nécessairement que $c = 0$ et donc

$$\cos(z) = \prod_{n \geqslant 0} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Exercice 2. Petit théorème de Picard.
Soit f une fonction entière non-constante d'ordre $\rho < \infty$.

1. Démontrer que f atteint tout nombre complexe sauf éventuellement un.
   Si f n'atteint pas $\alpha \in \mathbb{C}$, alors par le théorème de Hadamard on a $f(z) - \alpha = e^{P(z)}$ avec P polynôme. Comme P est surjectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (par d'Alembert-Gauss) et que exp est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, on a bien surjectivité de $f - \alpha$.

2. Démontrer que si ρ n'est pas entier, alors f atteint chaque point de son image une infinité de fois.
   Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction entière $f - \alpha$ est d'ordre ρ aussi, et donc elle se factorise comme $z^m e^{Q(z)} \prod_{\beta : f(\beta) = \alpha} E_p\left(\frac{z}{\beta}\right)$. Si le produit est fini, on a $f(z) - \alpha = P(z)e^{Q(z)}$, qui est d'ordre $\deg(Q) \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la supposition. Le produit doit donc être infini, et f a une infinité d'antécédents.

3. Supposons que ρ est entier. Démontrer que si f n'est pas un polynôme, alors f atteint tout nombre complexe une infinité de fois, sauf éventuellement un, et expliciter le cas où un nombre n'est atteint

qu'un nombre fini de fois.
Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ atteints seulement un nombre fini de fois. On a alors

$$f - \alpha_i = P_i e^{Q_i}$$

avec $\deg(Q_i) = \rho$, et donc $P_1 e^{Q_1} - P_2 e^{Q_2} = \alpha_2 - \alpha_1$. Si $\rho = 0$, on a en particulier que f est un polynôme, donc toute fonction entière non-polynomiale d'ordre 0 atteint tout point de $\mathbb{C}$ une infinité de fois. On traite à présent le cas $\rho > 0$.
En raisonnant sur la croissance à l'infini, on peut voir que Q_1, Q_2 ont le même terme dominant. On factorise $P_1 e^{Q_1} - P_2 e^{Q_2} = e^{az^d}(P_1(z)e^{R_1(z)} - P_2(z)e^{R_2(z)})$. On trouve alors $P_1 e^{R_1} - P_2 e^{R_2} = (\alpha_2 - \alpha_1)e^{az^d}$. Comme les degrés des R_i sont $< d$, l'ordre de la fonction à gauche est $< d$. Si $\alpha_2 \neq \alpha_1$, l'ordre de $(\alpha_2 - \alpha_1)e^{az^d}$ est d, donc nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$ et il n'y a qu'un point atteint un nombre fini de fois.

Exercice 3. Somme d'inverse de racines.
Soit $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière d'ordre ρ, on note $(\lambda_n)_n$ ses racines comptées avec multiplicité, rangées par ordre croissant de module. On suppose également que $a_0 \neq 0$.

1. On suppose dans cette question que $\rho < 1$. Démontrer que

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

C'est simplement le calcul du terme d'ordre 1 dans le développement du produit infini

$$f(z) = a_0 \prod_{n \geqslant 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

2. On fixe N un entier, $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, et on pose $g_N(z) = \prod_{j=0}^{N-1} f(\zeta^j z)$.

(a) Démontrer que $g_N(z) \in \mathbb{C}[\![z^N]\!]$, et que le coefficient de z^{kN} est un polynôme homogène en les a_i de degré N, faisant intervenir uniquement des a_i avec $i \leqslant kN$.
Le fait que le coefficient de z^k dans le produit de fonctions entières est homogène du bon degré s'observe sur la formule du produit de séries entières, pareil pour le fait que les termes qui interviennent sont d'ordre $\leqslant k$. Reste à voir que $g_N(z) \in \mathbb{C}[\![z^N]\!]$: pour ça, on écrit $f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n \geqslant 0} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$. Il suffit donc de montrer que $g_N \in \mathbb{C}[\![z^N]\!]$ si $f = e^{cz^r}$ ou si $f = 1 - \frac{z}{\lambda}$.
Dans le premier cas, on a

$$g_N(z) = e^{c \sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{rj} z^r}$$

et $\sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{rj} = 0$ si r n'est pas multiple de N. Dans le deuxième cas, c'est une simple factorisation

$$\prod_{j=0}^{N-1} (1 - \zeta^j w) = 1 - w^N.$$

(b) Supposons que f est un polynôme de degré d, démontrer en considérant la matrice compagnon de f que les coefficients de g_N sont en réalité des polynômes à coefficients entiers en les a_i.
Soit M la matrice compagnon de f. On écrit simplement $\prod_{j=0}^{N-1} f(\zeta^j z) = (-1)^{dN} a_d^N \prod_{j=0}^{N-1} \det(M - \zeta^j z) = (-1)^{dN} a_d^N \det(M^N - z^N)$. Comme les coefficients de M sont des 1 et les a_i/a_d, les coefficients de M^N sont des polynômes en les a_i/a_d à coefficients entiers, et donc les coefficients de $\prod_{j=0}^{N-1} f(\zeta^j z)$ sont de la forme $a_d^N P_i\left(\frac{a_1}{a_d}, ..., \frac{a_{d-1}}{a_d}\right)$ avec P polynôme à coefficients entiers. On sait par la question précédente qu'on a

$$a_d^N P_i\left(\frac{a_1}{a_d}, ..., \frac{a_{d-1}}{a_d}\right) = Q_i(a_0, ..., a_d)$$

et on en déduit que Q_i doit nécessairement être à coefficients entiers.

(c) Démontrer que les coefficients de g_N sont des polynômes homogènes à coefficients entiers en les a_i également quand f est une série entière.
Le coefficient d'ordre kN de g_N ne dépend que des coefficients d'ordre $\leqslant kN$ de f, et on peut donc remplacer f par sa troncature à l'ordre kN pour calculer les coefficients, ce qui donne le résultat.

3. Supposons que $N > \rho$, démontrer que
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n^N}$$
est un polynôme de degré $\leqslant N$ à coefficients entiers en les a_i/a_0, en particulier si f est à coefficients rationnels alors $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n^N}$ aussi.
Ecrivons $f(z) = a_0 e^{Q(z)} \prod_{n\geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$ avec Q de degré $\leqslant p$ et $Q(0) = 0$. Comme $N > \rho$, on a $N > p$ et on peut vérifier que
$$\prod_{j=0}^{N-1} e^{Q(\zeta^j z)} = \exp\left(\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=0}^{N-1} a_r \zeta^{jr} z^r\right) = e^0 = 1.$$
Cette même observation donne
$$\prod_{j=0}^{N-1} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) = \left(1 - \frac{z^N}{\lambda_n^N}\right).$$
Ainsi, $g_N(z) = a_0^N \prod_{n\geqslant 0}\left(1 - \frac{z^N}{\lambda_n^N}\right)$, et en identifiant le premier coefficient non-nul on a que $a_0^N \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n^N}$ est un polynôme homogène de degré N à coefficients entiers en les a_i, en divisant par a_0^N on obtient un polynôme de degré $\leqslant N$ à coefficients entiers en les a_i/a_0.

4. Retrouver $\zeta(2)$ de cette manière et démontrer que $\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q}$.
Pour retrouver $\zeta(2)$, on peut utiliser le produit du sinus ou du cosinus. Prendre $f(z) = \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ a le bon goût de directement donner la réponse avec la question 1, on a :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}.$$
La question précédente appliquée démontre que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\pi^{2n}k^{2n}}$ est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de Taylor de $\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$, qui sont rationnels.

5. Si $N > \rho$, démontrer que
$$\alpha \mapsto \sum_{\lambda : f(\lambda)=\alpha} \frac{1}{\lambda^N}$$
est une fonction rationnelle en α, avec un pôle d'ordre $\leqslant N$ en $\alpha = f(0)$.
On applique la question 3 à la fonction entière $f(z) - \alpha$, et on obtient (pour $\alpha \neq f(0)$) que $\sum_{\lambda : f(\lambda)=\alpha} \frac{1}{\lambda^N}$ est un polynôme de degré $\leqslant N$ à coefficients entiers en les $a_i/(a_0 - \alpha)$, d'où un pôle d'ordre $\leqslant N$.

6. Démontrer, pour $t \in [-1, 1]$ non nul que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\arcsin(t) + 2n\pi)^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi - \arcsin(t) + 2n\pi)^2} = \frac{1}{t^2}.$$
La somme est exactement de la forme $\sum_{\lambda : f(\lambda)=\alpha} \frac{1}{\lambda^N}$ avec $f(z) = \sin(z)$ et $N = 2$. Elle est donc donnée par le coefficient d'ordre 2 dans $(\sin(z) - t)(\sin(-z) - t) = t^2 - \sin^2(z) = t^2 - z^2 + O(z^4)$. On trouve donc bien $\frac{1}{t^2}$.

Démonstration du théorème de factorisation de Hadamard

Exercice 4. Formule de Jensen.
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$, telle que $f(z) \neq 0$ pour $|z| = R$ et $f(0) \neq 0$. On note $a_1, ..., a_N$ les zéros de f avec multiplicités. Démontrer l'égalité

$$\log|f(0)| = \sum_{n=1}^{N} \log|a_n/R| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

On pourra considérer la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{N}(z-a_n)}$ et appliquer le théorème de Cauchy à une fonction holomorphe bien choisie.
Commençons par un lemme : soit g une fonction entière ne s'annulant pas sur $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$. Alors

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})| d\theta.$$

On considère la fonction holomorphe $\frac{\log g(z)}{z}$, méromorphe au voisinage du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$. Le théorème des résidus, ou la formule de Cauchy, donne

$$2i\pi \log g(0) = \int_{\partial \overline{\mathbb{D}}(0,R)} \frac{\log g(z)}{z} dz.$$

En déroulant la définition de l'intégrale à droite, on a

$$2i\pi \log g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\log g(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \log g(Re^{i\theta}) d\theta.$$

En divisant par i et en prenant les parties réelles ($\Re \log(w) = \log|w|$) on obtient le résultat voulu pour g.
Pour généraliser ce résultat au cas où f a des racines, on considère $a_1, ..., a_N$ ses zéros avec multiplicités, et on applique le résultat à $\frac{g(z)}{\prod_n (z-a_n)}$, et on obtient

$$\log|f(0)| - \sum_{n=1}^{N} \log|a_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - a_n| d\theta.$$

Il s'agit maintenant d'évaluer cette dernière intégrale, sachant que $|a_n| < R$ pour tout n.
Pour ce faire, on réécrit $\log|Re^{i\theta} - a| = \log|R - ae^{-i\theta}|$ et on fait un changement de variable $\theta \to -\theta$ pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} \log|R - ae^{-i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} \log|R - ae^{i\theta}| d\theta.$$

On reconnaît ici $\int_0^{2\pi} \log|g(e^{i\theta})| d\theta$ avec $g(z) = R - az$ qui n'a pas de zéro dans le disque unité fermé, et cette intégrale s'évalue donc à $2\pi \log(R)$. En rentrant cette expression dans la formule ci-dessus, on obtient :

$$\log|f(0)| - \sum_{n=1}^{N} \log|a_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{2\pi} \log(R).$$

En réarrangeant cette expression, on obtient bien la formule de Jensen.

Exercice 5. Zéros d'une fonction entière d'ordre fini.
Soit f une fonction entière. On note $(a_n)_n$ les zéros de f, par ordre croissant de module et avec multiplicités, et $N_f(R)$ le nombre (avec multiplicités) de zéros de f de module $\leqslant R$.

1. (a) Démontrer que si $R > 0$ et $a_1, ..., a_N$ sont les racines de f de module $< 2R$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} \geqslant \log(2) N_f(R).$$

On minore $\log(2R/|a_n|)$ par 0 si $R < |a_n| < 2R$ et par $\log(2)$ si $|a_n| \leqslant R$, et on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} \geqslant \log(2) \sum_{|a_n| \leqslant R} 1 = \log(2) N_f(R).$$

(b) En déduire que pour $\alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0 \in \mathbb{R}$ telles que pour R assez grand, on a

$$N_f(R) \leqslant CR^\alpha.$$

On utilise la formule de Jensen, pour R assez grand on a $\log|f(z)| \leqslant CR^\alpha + D$ par définition de l'ordre de f, et alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(2Re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)| \\ &\leq C(2R)^\alpha + D - \log|f(0)|\end{aligned}$$

Quitte à grandir C, on peut négliger les constantes additives.

2. Démontrer que pour $\beta > \rho$, la somme

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^{-\beta}$$

converge.
Il suffit de prouver que $\sum_{n\geqslant N} |a_n|^{-\beta}$ converge pour N grand. L'idée est de dire que $\sum_{n:2^{m-1}\leqslant|a_n|\leqslant 2^m} |a_n|^{-\beta} \leqslant N_f(2^m)2^{-\beta m}$. En prenant $\rho < \alpha < \beta$, on a C tel que pour m assez grand, on a $N_f(2^m) \leqslant C2^{\alpha m}$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n>>0} |a_n|^{-\beta} &\leqslant \sum_{m>>0} N_f(2^m)2^{-\beta m+\beta} \\ &\leqslant 2^\beta C \sum_{m>>0} (2^{\alpha-\beta})^m\end{aligned}$$

qui converge.

Exercice 6. Théorème de factorisation de Hadamard
Soit f une fonction entière d'ordre $\rho > 0$. On pose, pour tout cet exercice, $p = \lfloor \rho \rfloor$, et les (a_n) sont la suite des zéros de f avec multiplicité, rangés par ordre croissant de module.

1. Démontrer à l'aide des exercices 5 et du théorème de factorisation de Weierstrass qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ et une fonction entière g telle que :

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n\geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Comme $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^{-p-1}$ converge (car $p+1 > \rho$), la suite $p_n = p$ satisfait les hypothèses du théorème de factorisation de Weierstrass, ce qui permet de conclure.

2. Pour prouver le théorème de Hadamard, il suffit de prouver que g est un polynôme. Pour ce faire, on veut minorer le produit des $E_p(z/a_n)$ - on commence par traiter les facteurs pour lesquels a_n est grand devant z.

(a) Démontrer que pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$E_p(z) = \exp\left(-\sum_{n\geqslant p+1} \frac{z^n}{n}\right).$$

Pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, on a $1 - z = \exp(\log(1-z)) = \exp\left(-\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}\right)$ et donc

$$(1-z)\exp\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{z^n}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{n\geqslant p+1} \frac{z^n}{n}\right).$$

(b) Démontrer que pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\rho < \alpha < p+1$, on a

$$|E_p(z)| \geqslant e^{-2^{\alpha-p-1}c|z|^\alpha}.$$

On écrit $w = -\sum_{n\geqslant p+1} \frac{z^n}{n}$, on a $E_p(z) = e^w$ donc $|E_p(z)| = |e^w| \geqslant e^{-|w|}$. On a $|w| \leqslant C|z|^{p+1}$, et $|z|^{p+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1-\alpha} |z|^\alpha$ (car $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $p+1 > \alpha$), ce qui permet de conclure que

$$|E_p(z)| \geqslant e^{-2^{\alpha-p-1}|z|^\alpha}.$$

(c) En déduire que pour tout $p+1 > \alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\prod_{n:|2z|\leqslant|a_n|} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$

Soit N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $z/|a_n| \leqslant \frac{1}{2}$. On a, pour $n \geqslant N$:

$$|E_p(z/a_n)| \geqslant e^{-C|z/a_n|^\alpha}$$

et donc

$$\prod_{n\geqslant N} |E_p(z/a_n)| \geqslant e^{-C\sum_{n\geqslant 1}|z/a_n|^\alpha}$$

qui est bien une majoration de la forme $e^{-C|z|^\alpha}$ car $\sum |a_n|^{-\alpha} < \infty$.

3. On s'occupe à présent des facteurs pour lesquels a_n est petit devant z, lesquels sont en nombre fini.

(a) Démontrer que si $|z| > \frac{1}{2}$, alors pour tout $\alpha > \rho$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|E_p(z)| \geqslant |1-z|e^{-C|z|^\alpha}.$$

Il s'agit ici de démontrer que

$$\left|\exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$

Pour ce faire, il suffit de démontrer que $\left|\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right| \leqslant C|z|^\alpha$ (encore une fois, on majore généreusement $|e^w| \geqslant e^{-|w|}$). L'existence de C découle du fait que α est supérieur au degré du polynôme $\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}$.

(b) Démontrer que si $z \notin \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$, alors

$$\prod_{n:|2z|>|a_n|} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant (2|z|)^{-(p+3)N_f(2|z|)}.$$

Il suffit de montrer que pour $z \notin \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$ et n vérifiant $|z/a_n| > \frac{1}{2}$, on a $|1 - z/a_n| \geqslant (2|z|)^{-p-3}$. On commence par écrire

$$|1 - z/a_n| = |z - a_n|/|a_n| \geqslant |a_n|^{-p-2}/|a_n| = |a_n|^{-p-3}$$

puis on observe que $|a_n| < 2|z|$ par hypothèse, ce qui conclut.

(c) En déduire que pour $\alpha > \rho$, pour $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ (pour tout n) et $|z|$ assez grand, on a

$$\left|\prod_{n\geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$

La condition $\big||z|-|a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ garantit que $z \notin \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$. On considère $\rho < \alpha' < \alpha$, on a $N_f(2|z|) \leqslant C|z|^{\alpha'}$, et ainsi

$$\prod_{n:|a_n|<|2z|} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant (2|z|)^{-(p+3)C|z|^{\alpha'}} = e^{-C(p+3)|z|^{\alpha'} \log|2z|}.$$

Quitte à agrandir C, on a pour $|z|$ assez grand $e^{-C(p+3)|z|^{\alpha'} \log|2z|} \geqslant e^{-C(p+3)|z|^{\alpha}}$ car $\alpha' < \alpha$. On a donc bien

$$\prod_{|a_n|<2|z|} \left|E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^{\alpha}}$$

et pareil pour le produit sur $|a_n| \geqslant 2|z|$, ce qui conclut.

4. Démontrer que pour $\alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|z|$ assez grand et $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ (pour tout n):

$$|e^{g(z)}| \leqslant e^{C|z|^{\alpha}}.$$

On écrit

$$e^{g(z)} = \frac{f(z)}{z^m \prod_{n\geqslant 1} E_p(z/a_n)}.$$

Si $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-1}$ pour tout n et $|z|$ assez grand, on a

$$|e^{g(z)}| \leqslant |f(z)|e^{C|z|^{\alpha}}$$

et comme f est d'ordre $\rho < \alpha$, on a l'inégalité demandée.

5. (a) Soit h une fonction entière, u sa partie réelle, $R > 0$ un réel. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a

$$-\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left(CR^{\alpha} - u(Re^{i\theta})\right) e^{-in\theta} d\theta.$$

Si on remplace h par $CR^{\alpha} - h$, il suffit de prouver que

$$\frac{h^n(0)}{n!} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

En développant $2u(Re^{i\theta}) = h(Re^{i\theta}) + \overline{h}(Re^{i\theta})$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} h(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \overline{h}(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{h^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \overline{h}(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.\end{aligned}$$

Cette deuxième intégrale est le conjugué complexe de

$$\frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} h(Re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2i\pi R^n} \int_{\partial D} h(Rz) z^{n-1} dz$$

qui est nulle par la formule de Cauchy.

(b) En déduire que si $u(Re^{i\theta}) \leqslant CR^{\alpha}$, alors

$$|h^{(n)}(0)| \leqslant 2Cn!R^{\alpha-n} - 2n!u(0)R^{-n}.$$

On majore brutalement

$$\begin{aligned}\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right| &\leqslant \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left(CR^{\alpha} - u(Re^{i\theta})\right) d\theta \\ &\leqslant 2CR^{\alpha-n} - 2u(0)R^{-n}.\end{aligned}$$

Pour voir que

$$\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta = 2\pi u(0)$$

on peut au choix faire un raisonnement similaire à celui utilisé pour la question 5.(a), utiliser la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques ou encore développer u en série de Fourier (qui converge normalement sur tout compact).

6. Démontrer le théorème de factorisation de Hadamard.
Si l'ensemble $\bigcap_{n\geqslant 1}\left\{\big||z|-|a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}\right\}$ contient des cercles de rayons aussi grands que voulus, on pourra conclure à l'aide de la question précédente que g est un polynôme : en faisant tendre R vers l'infini, on trouve $g^{(n)}(0) = 0$ pour $n > \alpha$.
L'ensemble $\bigcup_{n\geqslant 1}\{\big||z|-|a_n|\big| < |a_n|\}$ est une réunion disjointe d'anneaux d'épaisseur $2|a_n|^{-p-2}$ et de rayons $|a_n|$. L'épaisseur d'un tel anneau est $4\pi|a_n|^{-p-1}$, et la réunion des anneaux a donc une mesure finie, on peut en particulier trouver des cercles de rayons arbitrairement grands, disons une suite croissante $(R_m)_m$, dans le complémentaire.
On a donc, pour u la partie réelle de g et $n > \rho$:

$$\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant 2CR_m^{\alpha-n} - 2u(0)R_m^{-n}.$$

En faisant tendre $m \to \infty$, on trouve $g^{(m)}(0) = 0$, démontrant que g est un polynôme de degré $\leqslant \rho$ et prouvant ainsi le théorème de Hadamard.